Om osculerande parablar i allmänhet, samt särskild tillämpning på catenarian,

med Filosofiska Fakultetens tillstånd,

som med Præsidii biträde

af

Mag. **CARL JOH. Ds. HILL,**

Mathes. Prof. Reg. et Ord.

kommer att offentligen försvaras

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

af

författaren

CLAS WILH. ENEBERG,

Blekingsbo,

på Kemiska Auditorium, d. 28 Maj 1838.

LUND,

tryckt uti Berlingska Boktryckeriet, 1838.

Bland jemförelser, som blifvit anställde mellan kroklinier för att se huruvida ej den ena till större eller mindre delar öfverensstämmer med den andra, har man sig förnämligast bekanta dem som blifvit gjorde med osculerande cirkel och Apollonii parabel. För att exempelvis lemna bidrag till dylika jemförelser, framkastas denna lilla afhandling om Catenarian jemförd med parablar af hvad grad som helst.

Om man uti den allmänna parabelequationen $y^m = a^n x^{m-n}$, eller (då $m - n = r$) $y^m = a^{m-r} x^r$, ger åt m och r successivt olika värden, hvilka skola vara inter se primi, så uppkomma följande eqvationer:

$y^2 = ax$ (Apollonii parab.), $y^3 = a^2 x$ (1:e kubiske), $y^3 = a^2 x^2$ (den Neil'ske), $y^4 = a^3 x$, $y^4 = a x^3$ *), $y^5 = a^4 x$, $y^5 = a^3 x^2$, $y^5 = a^3 x^2$; $y^5 = a^2 x^3$, $y^5 = ax^4$, $y^6 = a^5 x$, $y^6 = ax^5$ o. s. v.

---

*) Då $m = n.r$, t. ex. $m = 4$ och $r = 2$, ger equationen ej någon parabel. Se Cramer Analyse des Lignes Courbes pag. 557.

På detta sätt får man

1	parabel	af 2	graden	6	parablar	af 9	graden
2	—	af 3	—	4	—	af 10	—
2	—	af 4	—	10	—	af 11	—
4	—	af 5	—	4	—	af 12	—
2	—	af 6	—	12	—	af 13	—
6	—	af 7	—	6	—	af 14	—
4	—	af 8	—	8	—	af 15	—
				8	—	af 16	—
					o. s. v.		

Ibland dessa parablar kunna flera lätt konstrueras genom hvarandra; t. ex. uti de kubiske parablarne, hvilkas eqvationer äro $y^3 = a^2 x$ och $u^3 = a x^2$ förhålla sig för samma abscissa $y : u = a : y$ eller $u = \frac{y^2}{a}$; uti de parablar, hvilkas eqvationer äro $y^6 = a^5 x$ och $u^{12} = a^{11} x$ (i hvilka abscissan x och den konstanta faktorn a äro gemensamma) är $y : u^2 = 1 : a$; uti $y^{11} = a^{10} x$ och $u^{12} = a^{11} x$ förhåller sig $y^{11} : u^{12} = I : a$. Dessa sednare hafva således åtminstone ett konstant förhållande till hvarandra.

Efter att sålunda genom införandet af speciella värden på m och n uti den generella eqvationen, hafva uppställt de särskildta parablarnes af lägre grader eqvationer, tar man i betraktande deras olika form, hvilken bestämmes af det förhållande hvari m och n stå till hvarandra. Om nemligen, i den generella eqvatio-

nen $y^m = p x^r$, m är ett' jemt tal och r udda, så är parabelns form lika med den vanlige.

Sådana äro t. ex. de uti hvilka

$m = 4$ och $r = 1$ eller 3,
$m = 6$, $r = 1$ eller 5 samt
$m = 8$, $r = 1$, 3, 5 eller 7.
o. s. v.

Uti de två andra händelserna, som kunna uppkomma, liknar parabeln någondera af de två kubiske *).

Antages nu någon af dessa parablar såsom osculerande en kroklinea, hvars eqvation är känd, så bör man välja en sådan parabel, hvars form är mest öfverensstämmande med den ifrågavarande kroklinien. T. ex. för Catenarian väljer man helst bland dem som hafva likhet med Apollonii parabel, eller som erhållas af eqvationen $y^m = p x^n$, deruti m är jemt och n udda tal.

Låt en sådan parabels koordinater, räknade från vertex såsom origo, vara t och u, och koordinaterne för den kroklinea som af densamma osculeras, äfven ifrån sin origo räknade, vara x och y, så måste, emedan man ej i högre parablar än af 3 graden **) kan uttaga dess öfrige elementer med mindre än att origo flyttas och eqvationen uttages i snedvinkligt system, den generella equationen $t^n = pu$ transformeras till $(t + \Delta t)^n = p\,(u + \Delta u)$.^{n} Och om

---

*) Cramer Lign. Courb. p. 457.

**) Se Prof. Hills Tractatus Geometricus, de Curvarum, quæ ab elasticitate etc. etc. pag. 16.

vidare $\Delta x +$ och Δy äro koordinaternas tillväxt i kurvan för samma punkt som parabelkoordinaternas tillväxt är Δt och Δu, samt den vinkel, som Δx gör med Δt kallas β, så är enligt vanlig koordinat transformation

$$\Delta t = \Delta x C\beta + \Delta y S\beta$$
$$\Delta u = \Delta y C\beta - \Delta x S\beta \text{ *)}$$

och om Δy utvecklas enl. Taylorska Theoremet uti

$$\Delta y = \Delta x y_1 + \Delta x^2 y_2 + \Delta x^3 y_3 + \cdots$$

hvarest $y_n = \frac{d^n y}{1.\,2\ldots n(dx)^n}$ **)

och denna serie insättes uti de tvänne nyss erhållne eqvationerne så fås

$$\Delta t = \Delta x (C\beta + y_1 S\beta) + (\Delta x^2 y_2 + \Delta x^3 y_3 +) S\beta$$

och $\Delta u = \Delta x (C\beta y_1 - S\beta) + (\Delta x^2 y_2 + \Delta x^3 y_3 +) C\beta$

hvaraf genom substitution

$$(t + \Delta x (C\beta + y_1 S\beta) + (\Delta x^2 y_2 + \Delta x^3 y_3 +) S\beta)^n =$$
$$p (n + \Delta x (C\beta y_1 - S\beta) + (\Delta x^2 y_2 + \Delta x^3 y_3 +) C\beta)$$

hvilken utvecklad ger

$$n t^{n-1} (C\beta + y_1 S\beta) = p (y_1 C\beta - S\beta) = (y_1 C\beta - S\beta) . \frac{t^n}{u},$$

$$n t^n S\beta . y_2 + n_3 t^{n-2} (C\beta + y_1 S\beta)^2 = p y_2 C\beta = y_2 C\beta . \frac{t^n}{u}$$

---

*) Garnier's Anal. Geom. p. 63.

**) Se Prof. Hills Prænotiones de Functionibus rationaliter Log. integrandis p. 5 noten.

$$n t^{n-1} y_3 S\beta + 2 n_2 t^{n-2} y_2 S\beta (C\beta + y_1 S\beta) =$$
$$p y_3 C\beta - n_3 t^{n-3} (C\beta + y_1 S\beta)^3 = y_3 C\beta . \frac{t^n}{u}.$$

Om tillika för p sättes $\frac{t^n}{u}$, så blifver

1) $\frac{nu}{t} = \frac{y_1 C\beta - S\beta}{C\beta + y_1 S\beta} = \frac{y_1 - T\beta}{y_1 T\beta + I} = T(\vartheta - \beta),$

om $y_1 = T\vartheta$

2) $\frac{nu}{t} . y_2 S\beta + n_2 . \frac{u}{t^2} (C\beta + y_1 S\beta)^2 = y_2 C\beta =$

$$= T(\vartheta - \beta) . \left(y_2 S\beta + \frac{n_2 (C\beta + y_1 S\beta)^2}{t}\right)$$

3) $\frac{nu}{t} . y_3 S\beta + 2 n_2 . \frac{u}{t^2} y_2 S\beta (C\beta + y_1 S\beta) + n_3 . \frac{u}{t^3} (C\beta +$
$y_1 S\beta)_3 = y_3 C\beta = T(\vartheta - \beta) . (y_3 S\beta + 2 n_2 y_2 S\beta (C\beta +$
$y_1 S\beta) . \frac{1}{t} + n_3 (C\beta + y_1 S\beta)^3 . \frac{1}{t}\Big).$

Utur dessa finnes af 2)

$t = \frac{n_2}{y_2} . (y_1 C\beta - S\beta) . (C\beta + y_1 S\beta)^2$ och således blir ur 3)

$$y_3 C\beta = T(\vartheta - \beta) . \Big(y_3 S\beta + 2 y_2 \frac{S\beta}{C\vartheta} . C(\vartheta - \beta) . \frac{y_2}{S(\vartheta - \beta) . C(\vartheta - \beta)^2}$$

eller

$$\frac{y_3 . C\vartheta}{C(\vartheta - \beta)} = y_2^2 . \left(2 . S\beta C\vartheta^2 + \frac{n_3}{n_2^2} . C\vartheta^3 . C(\vartheta - \beta)\right)$$

som är en eqvation för β eller för n. Således om man känner parabelns gradtal kan β finnas, men bibehålles n äfven obekant, så måste ännu en term tagas och af de två då uppkomne eqvationer beräknas β, n; n uttrycker då den parabel som aldranärmast inträffar med sjelfva kurvan.

Nu var $nu = t.T(\vartheta - \beta) = \frac{n t^n}{p}$,

hvaraf $p = \frac{n t^{n-1}}{T(\vartheta - \beta)}$ och $u = \frac{t^n}{p} = \frac{t.T(\vartheta - \beta)}{n}$

och således p och u bekanta då värdet för

$$t = \frac{n^2}{y^2} \frac{S(\vartheta - \beta).(C\beta + y_1 S\beta)^2}{C\vartheta} = \frac{n_2}{y_2} . \frac{S\vartheta C\beta - S\beta C\vartheta}{C\vartheta} . (C\beta + y_1 S\beta)^2$$

$$= \frac{n_2}{y_2} . (y_1 C\beta - S\beta)(C\beta + y_1 S\beta)^2$$

Vid beräknandet af n blir eqvationen qvadratisk, hvarföre två parablar lika mycket kunna osculera kroklinien, då båda rötterna bli reela.

Antages som ofvan sagdt Catenarian vara den kurva, som af någon parabel skall osculeras, så måste ur dennas eqvation de första derivaterna y_1, y_2 och y_3 sökas, hvilka ur kurvans eqvation kunna finnas genom vanlig differentiation, då dx tages $= 1$.

Eqvationen för den vanliga Catenarian är

$$y = c.L\left(\frac{c + x + \sqrt{2cx + x^2}}{c}\right)$$

hvilken upplöst i anseende till x ger

$$x - c = \frac{c}{2} \cdot \left(e^{\frac{y}{c}} + e^{-\frac{y}{c}} \right) - c$$

eller om för x substitueras $x - c$ så blir

$$x = \frac{c}{2} \left(e^{\frac{y}{c}} + e^{-\frac{y}{c}} \right) \text{*)}$$

och om axlarna förbytas äfven

$$y = \frac{c}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} \right)$$

hvilken differentierad ger $dy = \frac{\cdot}{2} \left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} \right) dx$ hvaraf $y_1 = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} \right)$; $y_2 = \frac{1}{4c} \left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} \right)$ och $y_3 = \frac{1}{12c^2} \cdot \left(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}} \right)$ hvarest som vanligt $e = 2,71828\ldots$ och $y_1 = \mathfrak{d}y$ $y_2 = \frac{1}{2} \mathfrak{d}y_1$ samt $y_3 = \frac{1}{3} \mathfrak{d}y_2$ då $\mathfrak{d}y = dy$ när $dx = 1$.

---

*) Se Burg Lehrb. der Höh. Mathem. 3:e B. p. 526.